اسئلة التمارين العامة

" مع الحل "

١- جد قيمة $x, y \in R$ والتي تحقق

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$$

Sol.

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

تحليل فرق بين مربعين
$a^2-b^2i^2=(a-bi)(a+bi)$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{(x-2i)\cancel{(x+2i)}}{\cancel{x+2i}}$$

$$\frac{y}{1+i} = x-2i$$

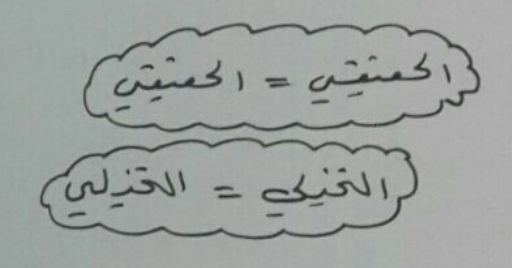
$$y=(x-2i)(1+i)$$

(عملية توزيع)

$$y = x + xi - 2i + 2$$

$i^2=-1$

$$y=(x+2)+(x-2)i$$



$$y = x+2 \quad --- ①$$

$$0 = x-2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

نعوض في ①

$$y = 2+2 \Rightarrow \boxed{y=4}$$

الست
غيداء طارق خليل

٢- جد ناتج $\left(3\omega^{9n} + \frac{5}{\omega^5} + \frac{4}{\omega^4}\right)^6$ حيث $n \in Z$

Sol)

$$\left(3(\omega^9)^n + \frac{5}{\omega^2} + \frac{4}{\omega}\right)^6$$

نقسم اس ω على 3 ونرفع ω الى باقي ناتج القسمة

$$\left(3(1)^n + \frac{5\omega^3}{\omega^2} + \frac{4\omega^3}{\omega}\right)^6$$

$\frac{9}{3} = 3 \frac{0}{3}$
باقي القسمة هو 0 اذن الناتج يكون 1

$1 = \omega^3$

$$\left(3 + 5\omega + 4\omega^2\right)^6$$

عند القسمة تطرح الاس

نجزئ 5ω الى $4\omega + \omega$

$$\left(3 + (\omega + 4\omega) + 4\omega^2\right)^6$$

$$\left(3 + \omega + (4\omega + 4\omega^2)\right)^6$$

$$\left(3 + \omega + 4(\omega + \omega^2)\right)^6$$

$$\left(3 + \omega + 4(-1)\right)^6$$

$$\left(3 + \omega - 4\right)^6$$

$$(-1 + \omega)^6$$

$$\left[(-1 + \omega)^2\right]^3 = \left[1 - 2\omega + \omega^2\right]^3$$

$$= \left[(1 + \omega^2) - 2\omega\right]^3$$

$$= \left[-\omega - 2\omega\right]^3 = \left[-3\omega\right]^3$$

$$= (-3)^3 \omega^3$$

$$= -27(1)$$

$$= -27$$

الست
غيداء طارق خليل

3 - اذا كان $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عدداً مركباً جد باستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{2}}$.

Sol/

$$z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}} = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

عملية توزيع في البسط

المقام $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$$= \frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3}{1+3} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-2}{4} - \frac{2\sqrt{3}i}{4}$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = \boxed{1}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

الزاوية تقع في الربع الثالث

$$\arg z = \pi + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

$$z = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

الست

غيداء طارق خليل

$$z^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$$

$\frac{2\pi}{3} = 2(60) = 120$ تقع في الربع الثاني

$k = 0, 1$

عندما $k=0 \Rightarrow \left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right) \Rightarrow \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

عندما $k=1 \Rightarrow \left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right) \Rightarrow \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$\frac{5\pi}{3} = 5(60) = 300$ تقع في الربع الرابع

٤ - قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل . كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كانت $9x^2+25y^2=225$ معادلة القطع الناقص جد :

أ) مساحة منطقة القطع الناقص
ب) محيط القطع الناقص
جـ) معادلة القطع الزائد
د) الاختلاف المركزي لكل منهما.

Sol:

$$9x^2+25y^2=225 \quad] \div 225$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

السـت
غـيداء طـارق خليـل

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=9 \Rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$

أ) مساحة القطع الناقص

$A=ab\pi \Rightarrow A=(5)(3)\pi \Rightarrow A=15\pi \text{ unit}^2$

ب) محيط القطع الناقص

$$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{34}{2}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{17}$$

$P=2\sqrt{17}\pi$ unit

جـ) معادلة القطع الزائد

∵ القطعان احدهما يمر ببؤرة الآخر
∴ رأس الناقص = بؤرة الزائد
بؤرة الناقص = رأس الزائد

للزائد

$\therefore a=4 \Rightarrow a^2=16$

$c=5 \Rightarrow c^2=25$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2 \Rightarrow b^2=25-16 \Rightarrow b^2=9$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

د) الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}$

$e=\frac{4}{5}$ للناقص

$e=\frac{5}{4}$ للزائد

6- جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$

(استقاق ضمني)

(الحد الاول : حاصل ضرب دالتين)

$$x^3\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(3x^2) - 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$2x^3y\frac{dy}{dx} + 3x^2y^2 - 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$2x^3y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$$

$$(2x^3y - 2)\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3y - 2}$$

الست
غيداء طارق خليل

---

b) $y = \sin 4x \tan 2x$

(حاصل ضرب دالتين)

$$\frac{dy}{dx} = (\sin 4x)(\sec^2 2x(2)) + (\tan 2x)(\cos 4x(4))$$

$$= 2\sin 4x \sec^2 2x + 4\tan 2x \cos 4x$$

---

c) $y = e^{x^2} \ln|2x|$

(حاصل ضرب دالتين)

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\left[\frac{1}{2x}(2)\right] + \ln|2x|\left[e^{x^2}(2x)\right]$$

$$= \frac{e^{x^2}}{x} + 2x e^{x^2} \ln|2x|$$

d) $y = \tan(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\sec^2(\cos x)}_{\text{مشتقة الدالة}} \underbrace{(-\sin x)}_{\text{مشتقة الزاوية}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \sec^2(\cos x)$$

---

e) $y = x^2 \ln|x|$ (حاصل ضرب دالتين)

$$\frac{dy}{dx} = x^{\cancel{2}}\left[\frac{1}{\cancel{x}}\right] + \ln|x|\,[2x]$$

$$= x + 2x\ln|x|$$

---

f) $y = \ln(\tan^2 x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan^{\cancel{2}} x}\left[2\,\cancel{\tan}\, x\,(\sec^2 x)(1)\right]$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$$

الست
غيداء طارق خليل

---

g) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}(-1)) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}(-1))}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} - 2 - \cancel{e^{-2x}}}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

5- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته (7π وحدة مربعة) ومحيطه يساوي (10π وحدة)

$$A = ab\pi$$

$$7\pi = ab\pi \Rightarrow b = \frac{7}{a} \Rightarrow \boxed{b^2 = \frac{49}{a^2}} \quad \text{--- } ①$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad] \div 2$$

$$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ بالتربيع

الســت
غيداء طارق خليل

$$25 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \boxed{a^2+b^2=50} \quad \text{--- } ②$$

نعوض ① في ②

$$a^2 + \frac{49}{a^2} = 50 \quad] * a^2$$

$$a^4 + 49 = 50a^2 \Rightarrow a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$(a^2 - 49)(a^2 - 1) = 0$$

اما $a^2 - 49 = 0 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow b^2 = 1$

المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

أو $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 49$

[$a < b$ يهمل لان]

7- استخدم مبرهنة رول ثم القيمة المتوسطة لإيجاد قيم c للدالة

$f(x) = x^4 - 2x^2$ ، $x \in [-2,2]$

مبرهنة رول :

١- $f(x)$ دالة مستمرة على $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود

٢- $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود

3) $f(a) = f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2$
$= 16 - 8 = 8$

$f(b) = f(2) = (2)^4 - 2(2)^2$
$= 16 - 8 = 8$

$f(a) = f(b)$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

السـت
غيداء طارق خليل

$\therefore f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(c) = 4c^3 - 4c$

$4c^3 - 4c = 0 \;]\div 4 \Rightarrow c^3 - c = 0 \Rightarrow c(c^2 - 1) = 0$

إما $\boxed{c = 0} \in (-2,2)$

أو $c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1} \in (-2,2)$

$\boxed{c = -1} \in (-2,2)$

مبرهنة القيمة المتوسطة

١- الدالة مستمرة على $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$4c^3 - 4c = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

$$4c^3 - 4c = \frac{8 - 8}{4} \Rightarrow [4c^3 - 4c = 0\,] \div 4$$

$$c^3 - c = 0$$

$c(c^2 - 1) = 0 \Rightarrow$ إما $c = 0 \in (-2,2)$

أو $c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1$

$c = 1 \in (-2,2)$

$c = -1 \in (-2,2)$

8) $f(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$

فإذا كانت $c=2$ تنتمي للفترة $(-1,b)$ جد قيمة $a,b \in R$

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

$\therefore f'(c)=0$

الست.
غيداء طارق خليل

$f'(x)=2ax-4$

$f'(c)=2ac-4$

$f'(2)=2a(2)-4 \Rightarrow 4a-4=0 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$f(a)=f(b)$

$f(a)=f(-1)=a(-1)^2-4(-1)+5 \;=a+9$

$f(b)=\;ab^2-4b+5$

$ab^2-4b+5=a+9$

$(1)\,b^2-4b+5=1+9$ ($a=1$)

$b^2-4b+5-10=0$

$b^2-4b-5=0 \Rightarrow (b-5)(b+1)=0$

إما $b-5=0 \Rightarrow \boxed{b=5}$

أو $b+1=0 \Rightarrow b=-1$ (تهمل $b>a$)

٩- متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته (2.97cm)

نفرض طول ضلع القاعدة x والارتفاع $3x$

$V = x^2 h$

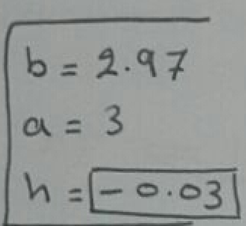
$V(x) = x^2(3x)$

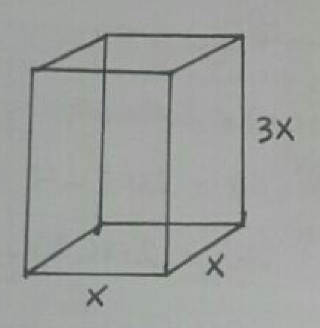
$V(x) = 3x^3$

$V(a) = V(3) = 3(3)^3 = \boxed{81}$

$V'(x) = 9x^2$

$V'(a) = V'(3) = 9(3)^2 = \boxed{81}$





الست: غيداء طارق خليل

$V(a+h) \simeq V(a) + h\,V'(a)$

$V(3-0.03) \simeq 81 + (-0.03)(81)$

$V(2.97) \simeq 81 - 2.43$

$\simeq 78.57\ cm^3$

---

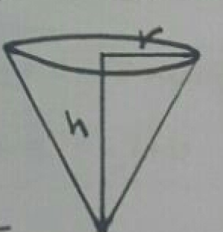
١٠) مخروط دائري قائم حجمه ($210\pi\ cm^3$) . جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه (10 cm)

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$210\pi = \frac{1}{3}\pi r^2(10)\ ]\div 10$

$21 = \frac{1}{3} r^2\ ] * 3$

$63 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{63}$



b = 63
a = 64
h = -1

$r(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$r(a) = r(64) = \sqrt{64} = \boxed{8}$

$r'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$r'(a) = r'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2(8)} = \frac{1}{16} = 0.0625$

$r(a+h) \simeq r(a) + h\,r'(a)$

$r(64-1) \simeq 8 + (-1)(0.0625)$

$r(63) \simeq 8 - 0.0625$

$\sqrt{63} \simeq 7.9375\ cm$ نصف القطر

١١- اذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$

$$f(x)=\sqrt[5]{31x+1}=(31x+1)^{\frac{1}{5}}$$

$b=1.01$
$a=1$
$h=0.01$

$$f(a)=f(1)=\sqrt[5]{31(1)+1}=\sqrt[5]{32}=\boxed{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{-\frac{4}{5}}(31)$$

$$=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31x+1)^4}}$$

$$f'(a)=f'(1)=\frac{31}{5\sqrt[5]{(31(1)+1)^4}}=\frac{31}{5\sqrt[5]{(32)^4}}=\frac{31}{5(2)^4}$$

$$=\frac{31}{5(16)}=\frac{31}{80}=\boxed{0.3875}$$

$$f(a+h)\simeq f(a)+hf'(a)$$

$$f(1+0.01)\simeq 2+(0.01)(0.3875)$$

$$f(1.01)\simeq 2+0.003875$$

$$\simeq 2.003875$$

الست
غيداء طارق خليل

١٢- باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المخطط البياني للدالة

$yx^2=1$

Sol)

$$yx^2=1\ ]\div x^2 \Rightarrow y=\frac{1}{x^2}$$

١- اوسع مجال للدالة $R\setminus\{0\}$

٢- التقاطع مع الصادات

$x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{0}$ غير معرفة

التقاطع مع السينات

$y=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow 1=0$ هذا غير ممكن

3- التناظر

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

∴ يوجد تناظر مع محور الصادات

4- المحاذيات : العمودي

$$x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

الأفقي

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

5- النهايات ونقاط الانقلاب

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3} \quad , \quad f'(x) = 0$$

الست
غيداء طارق خليل

$$\frac{-2}{x^3} = 0 \Rightarrow -2 \neq 0$$

∴ لا توجد نقاط حرجة

$x<0$ ، 0 ، $x>0$
`+ + + + (0) - - - - -`

مناطق التزايد $\{x : x<0\}$ ، التناقص $\{x : x>0\}$

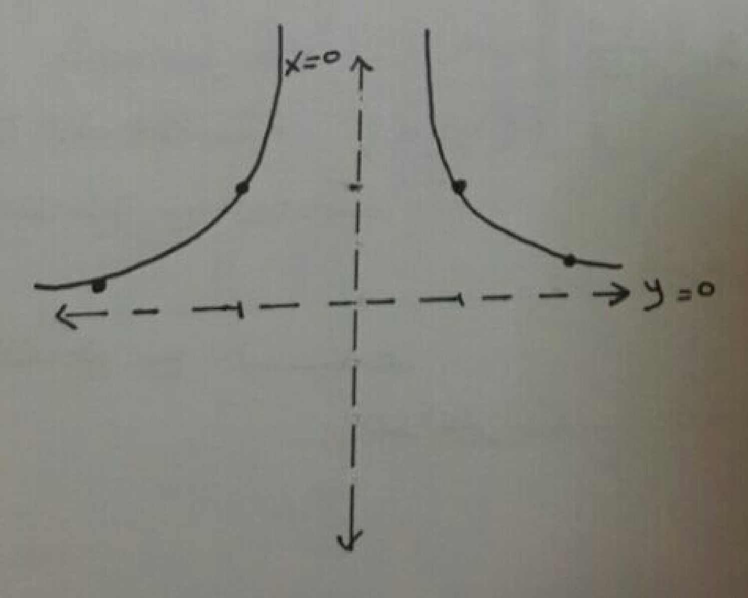
$$f''(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4} \quad , \quad f''(x) = 0$$

$$\frac{6}{x^4} = 0 \Rightarrow 6 \neq 0$$

∴ لا توجد نقاط انقلاب

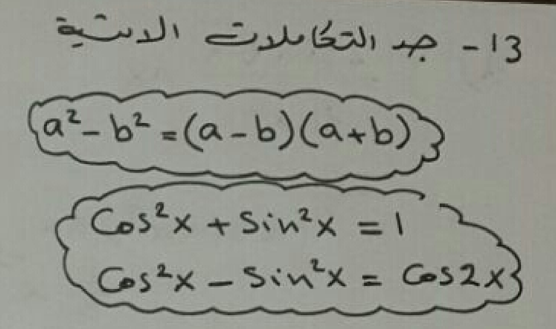
$x<0$ ، 0 ، $x>0$
`+ + + + (0) + + + +`

الدالة مقعرة في $\{x : x>0\}$ ، $\{x : x<0\}$



x	y	(x, y)
-2	$\frac{1}{4}$	$(-2, \frac{1}{4})$
-1	1	(-1, 1)
1	1	(1, 1)
2	$\frac{1}{4}$	$(2, \frac{1}{4})$

13- جد التكاملات الآتية



a) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$

$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$

$\int (\cos 2x)(1)\, dx$

$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

---

b) $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\, dx$

عملية توزيع

$\int (\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \cos^2 2x - 2)\, dx$

$-\frac{1}{2} \int (-2 \sin 2x) \cos^2 2x\, dx + 2 \int \sin 2x\, dx - \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x\, dx - \int 2dx$

$-\frac{1}{2} \frac{\cos^3 2x}{3} + [-\cos 2x] - [\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x] - 2x + C$

$-\frac{1}{6} \cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x - 2x + C$

$-\frac{5}{2} x - \frac{1}{6} \cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$

---

c) $\int \frac{\ln |x|}{x} dx$

$\int \ln |x| \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln |x|)^2}{2} + C$

مشتقة ln

الست
غيداء طارق خليل

d) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(2\sin x^{\frac{1}{3}}\right)dx$

$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ مشتقة الزاوية هيا

$3\int \underbrace{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}_{\text{تحل}}\left(2\sin x^{\frac{1}{3}}\right)dx$

$3\left[2\left(-\cos x^{\frac{1}{3}}\right)\right]+c$

$-6\cos\sqrt[3]{x}+c$

---

e) $\int \cot x \csc^3 x\,dx$

$\int \cot x \csc x \csc^2 x\,dx$

مشتقة $\csc x$ هي $-\csc x\cot x$

$-\int \underbrace{-\cot x\csc x}_{\text{مشتقة تحل}}\csc^2 x\,dx$

$-\frac{\csc^3 x}{3}+c$

السـت

غيداء طارق خليل

---

f) $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx$

$\int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\,dx$

$\int x\,(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$-10x$ مشتقة داخل القوس

$-\frac{1}{10}\int \underbrace{-10x}_{\text{تحل}}\,(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$=-\frac{1}{10}\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c \quad = -\frac{1}{10}\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt[3]{(3-5x^2)^4}+c$

$=\frac{-3}{40}\sqrt[3]{(3-5x^2)^4}+c$

g) $\int \frac{1}{x^2 - 14x + 49} \, dx$

$= \int \frac{1}{(x-7)^2} \, dx$

$= \int (x-7)^{-2} \, dx = \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{-1}{(x-7)} + C$

الســـت
غـــيداء طـــارق خليـــل

---

h) $\int \sec^2 3x \, e^{\tan 3x} \, dx$

مشتقة $\tan 3x$ هي $3\sec^2 3x$

$\frac{1}{3} \int 3\sec^2 3x \, e^{\tan 3x} \, dx$

$\frac{1}{3} e^{\tan 3x} + C$



14) حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$y' = \frac{\cos^2 y}{x} \qquad y = \frac{\pi}{4} , x = 1$$

Sol,

الست
غيداء طارق خليل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \sec^2 y = \int \frac{dx}{x}$$

($\frac{1}{\cos y} = \sec y$)

$$\tan y = \ln|x| + c$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \ln|1| + c$$

(نعوض $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$)

$$1 = 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\therefore \tan y = \ln|x| + 1$$

---

15) حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = -2x \tan y \qquad x = 0 , y = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{\tan y} = -2x\, dx$$

($\frac{1}{\tan y} = \cot y$)

$$\int \cot y\, dy = \int -2x\, dx$$

($\cot y = \frac{\cos y}{\sin y}$)

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -2 \int x\, dx$$

($x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$)

$$\ln|\sin y| = -x^2 + c$$

$$\ln\left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = -(0)^2 + c \Rightarrow \ln|1| = 0 + c \Rightarrow 0 = c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\ln\left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = -x^2$$

(بأخذ e للطرفين)

$$\sin y = \mp e^{-x^2}$$

16) حل المعادلة التفاضلية $xy' = y - x$ حيث $x = 1 , y = 1$

Sol)

$$x \frac{dy}{dx} = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x}$$

(تجزئة البسط على المقام)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{x}$$

نفرض $v = \frac{y}{x} \Leftarrow y = vx \Leftarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1$$

$$x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} - 1 - \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -1$$

$$\int dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$v = -\ln|x| + c$$

($x = 1 , y = 1$)

($v = \frac{y}{x} = \frac{1}{1}$)

$$\frac{1}{1} = -\ln|1| + c$$

$$1 = 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$v = -\ln|x| + 1$$

$$\therefore \frac{y}{x} = -\ln|x| + 1$$

الست
غيداء طارق خليل